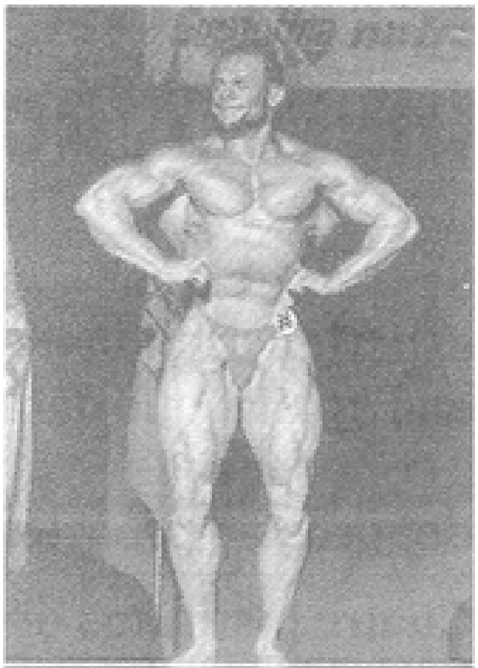
15 3° ESO

La mayoría de los hombres nacen como originales y terminan como copias

Oriental



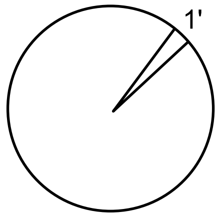
Figuras y cuerpos

ÍNDICE:

MILLA NÁUTICA

Con objeto de simplificar los cálculos que requería la navegación, se estableció una unidad de longitud que estuviese relacionada con medidas de ángulos y así aprovechar la información que podían sacar de la variación en la posición de las estrellas.

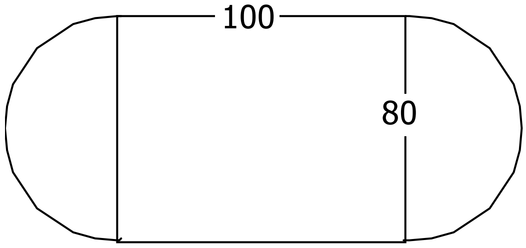
A esta unidad se le dio el nombre de milla náutica que es la longitud de un arco de meridiano terrestre cuyo ángulo central mide 1'.



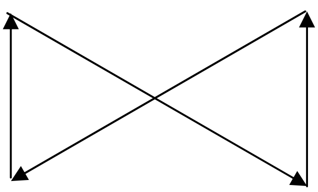
¿Cuántos Km. representa?

PISTA DE ATLETISMO

Tenemos una pista de atletismo con las siguientes dimensiones:



Un corredor da vueltas al rectángulo central. Otro lo hace al recorrido total (es decir, los laterales y las dos semicircunferencias). Por fin, otro hace del rectángulo central los dos lados menores y las dos diagonales:



¿Qué diferencia hay entre las tres distancias?

Si quisiéramos hacer una pista cuyo recorrido total fuese de dos largos de 100 metros y otras dos semicircunferencias de 100 metros, ¿de cuánto tendría que ser el ancho de la pista?

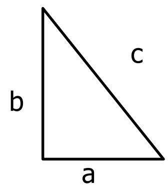
1. FÓRMULAS FUNDAMENTALES PARA CÁLCULO DE LONGITUDES, SUPERFICIES Y VOLÚMENES

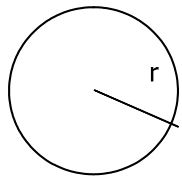
LONGITUDES

Para el cálculo de longitudes son importantes en el caso de…

Polígonos

El teorema de Pitágoras. $c^2 = a^2 + b^2$





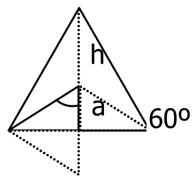
Circunferencia

La longitud de una circunferencia. $L = 2 \cdot \pi \cdot r$

Apotema de un triángulo equilátero:

$a = \frac{1}{3}h$

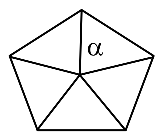
En el dibujo están las claves de la demostración.



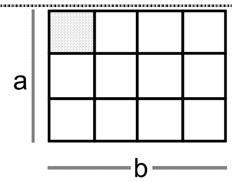
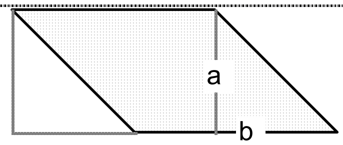
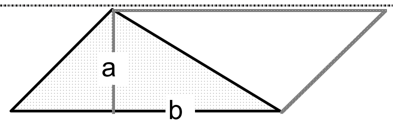
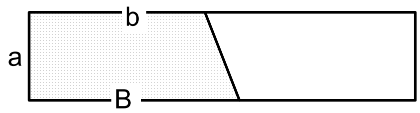
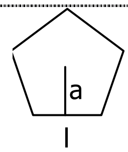
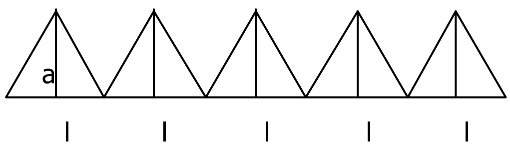
Apotema: En un polígono, la perpendicular desde el centro a uno de sus lados.

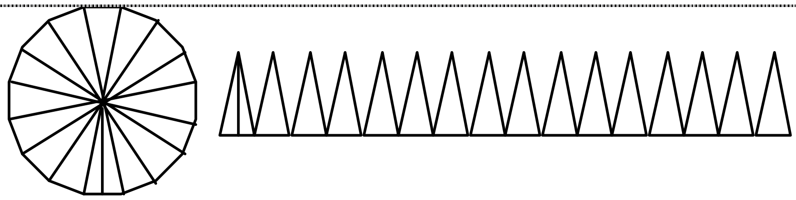
Ángulo interior de un polígono regular

Deducción de su valor es sencillo a partir de la triangulación de la figura: $\alpha = \frac{(n-2) \cdot 180}{n}$



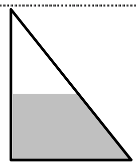
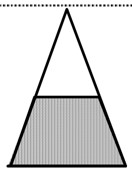
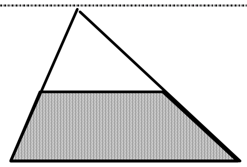
SUPERFICIES

Rectángulo: S = a · b	
Paralelogramo: S = a · b	
Triángulo: $S = \frac{a \cdot b}{2}$	
Trapecio: $S = \frac{(b + B) \cdot a}{2}$	
Polígonos regulares: $S = \frac{p \cdot a}{2}$	 

Circunferencia: $S = \frac{p \cdot a}{2} = \frac{2\pi r \cdot r}{2} = \pi \cdot r^2$	

__Trapecios__

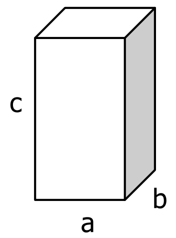
Se clasifican así según su forma:

Rectángulo	Isósceles	Escaleno
		

VOLÚMENES

Del ortoedro. Prisma recto de bases rectangulares.

V = a · b · c



2. LONGITUDES Y ÁREAS DE FIGURAS CIRCULARES

SECTOR CIRCULAR O TRIÁNGULO CIRCULAR Y TRAPECIO CIRCULAR

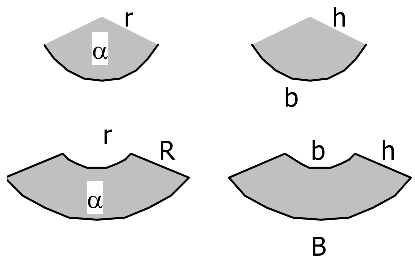
Longitud: $\frac{2 \cdot \pi \cdot r \cdot \alpha}{360}$

Superficie: $\frac{\pi \cdot r^2 \cdot \alpha}{360}$

Triángulo circular: $S = \frac{b \cdot h}{2}$

Corona circular: $\pi \cdot (R^2 - r^2)$

Trapecio circular: $S = \frac{B + b}{2} \cdot h$



__Deducciones__

Del triángulo circular:

$$\begin{array}{cc} longitud & superficie \\ 2\pi h & \pi h^2 \\ b & x \end{array} \rightarrow x = \frac{\pi h^2 \cdot b}{2\pi h} = \frac{b \cdot h}{2}$$

Del trapecio circular:

El área del trapecio circular es $\frac{\pi \cdot (R^2 - r^2) \cdot \alpha}{360} = \frac{\pi \cdot (R + r) \cdot (R - r) \cdot \alpha}{2} =$

$= \frac{\pi \cdot (R + r) \cdot h \cdot \alpha}{2} = h \cdot \frac{\pi R\alpha + \pi r\alpha}{2} = h \cdot \frac{B + b}{2}$

3. POLIEDROS REGULARES

Poliedro: Cuerpo o sólido limitado por caras poligonales. Para "cerrar" un vértice necesitamos al menos tres caras. Con dos caras tenemos un diedro, determinan una arista. Cortando dicha arista con un plano secante a los otros dos ya se cerraría el sólido en ese vértice.

Sus **elementos** son: vértices (punto en el que concurren tres o más aristas), aristas (intersección de dos caras) y caras (polígonos que limitan la figura).

Se dice **regular** si todas sus caras son polígonos regulares iguales y en cada vértice concurren el mismo número de caras (dos tetraedros unidos por una cara cumplirían el estar formado por polígonos regulares iguales pero no sería un poliedro regular).

Se denominan poliedro **convexo** a todo aquel cuyas superficies no pueden tener más de dos puntos comunes con una recta exterior a sus caras. Esta característica también la cumplen todas sus aristas. Un poliedro convexo queda por entero de un lado de sus caras; el caso contrario lo constituyen los poliedros **cóncavos**.

Sólo existen **5 poliedros regulares**: tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro, icosaedro.

FÓRMULA DE EULER PARA UN POLIEDRO CONVEXO:

c + v = a + 2 (Carlos V, Austria 2º).

Caras más vértices es igual a aristas más dos.

Partiendo de Euler se pueden deducir los 5 sólidos regulares.

Triángulos equiláteros:

3 triángulos por vértice:

número de caras: c	número de vértices	número de aristas	+2
n	$\frac{3n}{3}$ (cada triángulo aporta 3 vértices que en el poliedro se agrupan de 3 en 3)	$\frac{3n}{2}$ (Cada triángulo aporta 3 aristas que en el poliedro se agrupan de 2 en 2)	2

De esta manera nos quedaría la ecuación:

$$n + \frac{3n}{3} = \frac{3n}{2} + 2. \textit{ Cuya única solución es } n = 4. \textit{ Tetraedro}.$$

4 triángulos por vértice:

número de caras: c	número de vértices	número de aristas	+2
n	$\frac{3n}{4}$	$\frac{3n}{2}$	2

De esta manera nos quedaría la ecuación:

$$n+\frac{3n}{4}=\frac{3n}{2}+2.\ \textit{Cuya única solución es } n=8.\ \textit{Octaedro.}$$

5 triángulos por vértice:

número de caras: c	número de vértices	número de aristas	+2
n	$\frac{3n}{5}$	$\frac{3n}{2}$	2

De esta manera nos quedaría la ecuación:

$$n+\frac{3n}{5}=\frac{3n}{2}+2.\ \textit{Cuya única solución es } n=20.\ \textit{Icosaedro.}$$

6 triángulos por vértice:

Imposible.

Cuadrados:

3 cuadrados por vértice:

número de caras: c	número de vértices	número de aristas	+2
n	$\frac{4n}{3}$ (cada cuadrado aporta 4 vértices que en el poliedro se agrupan de 3 en 3)	$\frac{4n}{2}$ (Cada cuadrado aporta 4 aristas que en el poliedro se agrupan de 2 en 2)	2

De esta manera nos quedaría la ecuación:

$$n+\frac{4n}{3}=\frac{4n}{2}+2.\ \textit{Cuya única solución es } n=6.\ \textit{Hexaedro o cubo.}$$

Con más caras por vértice es imposible.

3 pentágonos regulares por vértice:

número de caras: c	número de vértices	número de aristas	+2
n	$\frac{5n}{3}$ (cada pentágono aporta 5 vértices que en el poliedro se agrupan de 3 en 3)	$\frac{5n}{2}$ (Cada pentágono aporta 5 aristas que en el poliedro se agrupan de 2 en 2)	2

De esta manera nos quedaría la ecuación:

$$n+\frac{5n}{3}=\frac{5n}{2}+2.\ \textit{Cuya única solución es } n=12.\ \textit{Dodecaedro.}$$

Con más caras por vértice es imposible.

Con poliedros de orden superior es imposible porque el hexágono ya tiene de ángulo interior 120º.

Ejercicio:

Hacer una tabla que recoja el número de caras, vértices y aristas de los cinco sólidos platónicos.

4. PRISMAS Y PIRÁMIDES

PRISMAS

Prisma: Poliedro formado por dos bases que son polígonos iguales y paralelos y las restantes caras paralelogramos limitador por aristas que unen los vértices correspondientes de las dos bases.

Clasificación según el polígono de las bases: triangular, cuadrangular, pentagonal, hexagonal.

Clasificación según la forma: regular (lo son las bases), recto (aristas laterales perpendiculares a las bases) y oblicuo (en caso contrario).

Paralelepípedo: Prisma cuyas bases son paralelogramos.

PIRÁMIDES

Poliedro en el que una cara es un polígono y las restantes son triángulos con un vértice común (vértice de la pirámide).

Clasificación según el polígono de la base: triangular, cuadrangular, pentagonal, hexagonal.

Clasificación según la forma: regular o recta si lo es su base (polígono regular) y todas las aristas laterales son de igual longitud. En este caso la altura cae en el centro de la base. Oblicua en caso contrario.

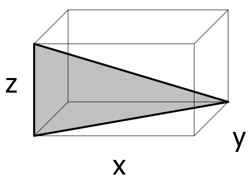
Apotema: En un polígono, la perpendicular desde el centro a uno de sus lados.

En una pirámide, la perpendicular que une el vértice con uno de los lados de la base.

5. PITÁGORAS EN PRISMAS Y PIRÁMIDES

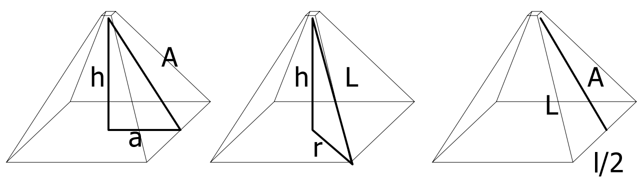
Diagonal de un ortoedro:

$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$



Apotema y altura de una pirámide

Tenemos las siguientes relaciones para las pirámides regulares:



$$A^2 = h^2 + a^2; \quad L^2 = h^2 + r^2; \quad L^2 = A^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2$$

A: apotema; L: arista lateral; a: apotema de la base; h: altura; r: radio de la base.

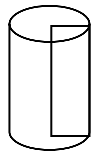
6. SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN

Son los cuerpos que se obtienen al girar un recinto plano alrededor de un eje situado en el mismo plano describiendo cada punto una circunferencia completa.

Se llama eje del sólido al eje de giro.

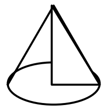
Se llama generatriz del sólido a cada una de las rectas que lo generan.

CILINDRO



Sólido de revolución producido por el giro de un rectángulo sobre un lado.

CONO



Sólido de revolución producido por el giro de un triángulo rectángulo que gira sobre un cateto.

También se pueden usar los resultados anteriores (Pitágoras, longitud circunferencia, área círculo,…) para hallar sus elementos.

7. ÁREAS DE POLIEDROS, CILINDROS Y CONOS

Haciendo su desarrollo plano y hallando la superficie de cada cara.

Hablaremos de S_L = superficie de las caras laterales.

Hablaremos de S_B = superficie de las bases o de la base.

Hablaremos de S_T = superficie total: $S_L + S_B$.

8. VOLÚMENES DE CUERPOS SIMPLES

VOLÚMENES DE PRISMAS Y CILINDROS

$V = B \cdot h$

VOLÚMENES DE PIRÁMIDES Y CONOS

$$V = \frac{B \cdot h}{3}$$

9. ESFERA

Las fórmulas básicas para la esfera son las siguientes.

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3;\ S = 4\pi r^2$$

La esfera tiene la misma superficie lateral que un cilindro que tuviese el mismo radio y altura que la base. De aquí se podrían sacar consecuencias sobre la superficie de una zona esférica (superficie comprendida entre dos "paralelos") ya la de un casquete esférico (superficie comprendida entre un polo y un "paralelo")

El huso (superficie comprendida entre dos meridianos) y la cuña (volumen comprendido entre dos meridianos) se halla por proporcionalidad con el ángulo que define el huso o la cuña.